

7 settembre 2009

Matematica - PRIMA PARTE

per il c.l. in Biotecnologie

(1) Sia $X = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ l'insieme dei numeri complessi diversi da 1. Si verifichi che:

- a) la posizione $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ definisce una applicazione $f: X \rightarrow X$ suriettiva;
- b) f è biiettiva, determinandone l'inversa.

(2) Si consideri la funzione

$$y = f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x-2}}.$$

Se ne studino:

- dominio, segno, eventuali simmetrie;
- limiti significativi ed eventuali asintoti;
- derivata prima, crescita, eventuali punti di massimo e di minimo, attacchi;
- derivata seconda, convessità, eventuali punti di flesso;
- grafico.

(3) Si calcolino i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \left(\frac{x}{2} + 1\right)e^{\sqrt{x+2}} dx, \quad \int \operatorname{tg} x \ln(\cos x) dx, \quad \int \frac{\sqrt{x} - 1/2}{(x - \sqrt{x} + 2)\sqrt{x}} dx.$$

(4) Utilizzando il teorema della media integrale per la funzione $f(x) = \cos x$, con $x \in [0, 1]$, si dimostri che esiste $\alpha \in]0, 1[$ tale che $\cos \alpha = \sin 1$.

(5) Una sostanza radioattiva decade del 15% in 1 anno. Qual è il suo tempo di dimezzamento?

(6) Si determinino tutte le applicazioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ derivabili tali che

$$f'(x) = x^2 f(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.